LIBRIS We know books

Observații:

1) Nu întotdeauna există infimum sau supremum pentru o mulțime.

2) Se notează *inf A* = infimum pentru A și *sup A* = supremum pentru A.

3) Dacă $\exists\, inf\ A$ și $inf\, A \in A \Rightarrow inf\, A = min A$.

$\exists\ sup A$ și $sup A \in A \Rightarrow sup A = max A$.

Axioma lui Cantor: Orice mulțime de numere reale, nevidă, mărginită superior admite supremum.

Teorema lui Arhimede: $\forall\, a,b \in \mathbb{R}, b > 0, \exists\, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a < n \cdot b$.

Teoremă: $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ cu $a < b, \exists\, r \in \mathbb{Q}$ astfel încât $a < r < b$.

Vecinătăți

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $r > 0$. Se numește **interval centrat în a** un interval de forma $(a-r;\ a+r)$. Se numește **vecinătate a lui a** orice mulțime *V* care conține un interval deschis centrat în *a*.

Exemple:

1) $(a;b) = V_x, \forall x \in (a;b)$ (V_x – vecinătatea punctului x)

2) $(a-r; a+r) = V_a, \forall r > 0$

3) $(a;\infty] = V_\infty; [-\infty; a) = V_{-\infty}; a \in \mathbb{R}$.

Fie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ o mulțime. Elementul $x \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește **punct de acumulare** pentru *A* dacă în orice vecinătate a lui *x* există cel puțin un punct din $A - \{x\}$. În caz contrar, el se numește **punct izolat**.

Exemplu: Fie $A = (7;8)$; $\forall x \in (7;8)$ avem: $\forall\, V \in \mathcal{V}(x), V \cap (A - \{x\}) \neq \varnothing \Rightarrow$

$\Rightarrow x$ punct de acumulare pentru *A*, unde am notat $\mathcal{V}(x) =$ mulțimea vecinătăților punctului *x*.

Șiruri de numere

Se numește **șir de numere reale** o funcție $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$\boldsymbol{u(n) \overset{not}{=} u_n =} \textbf{ termenul general al șirului}$$

Se notează $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Un șir de numere poate fi definit astfel:

a) precizând formula termenului general

Exemple: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}};\ u_n = 3n + 2$;

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}};\ u_n = \sin n$.

b) precizând o relație de recurență între termenii șirului

Exemple: $(u_n)_{n\in\mathbb{N}};\ u_0 = 7;\ u_n = 2u_{n-1} - 5$;

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}};\ u_0 = 1;\ u_n = \dfrac{1}{u_{n-1}^2 + 1}$.

METODE DE INTEGRARE

LIBRIS We know books

1) Integrarea prin părți

Fie $f,g:I\to\mathbb{R}$ două funcții derivabile cu derivatele continue.

Atunci fg' și $f'g$ admit primitive și avem:

$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int g(x)\cdot f'(x)dx$ (formula de integrare prin părți)

Exemplu:

$$\int \ln^2 x dx=\int x'(\ln^2 x)dx=x\ln^2 x-\int x\cdot(\ln^2 x)'dx=x\ln^2 x-2\int \ln x\cdot\frac{1}{x}xdx$$
$$=x\ln^2 x-2\int \ln x dx=x\ln^2 x-2\int x'\cdot\ln x dx=x\ln^2 x-2x\ln x+2\int x\cdot\frac{1}{x}dx=$$
$$=x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C$$

2) Prima metodă de schimbare de variabilă

Fie I și J două intervale din $\mathbb{R}$ și $\varphi:I\to\mathbb{R}, f:J\to\mathbb{R}$ două funcții cu φ derivabilă pe I și f admite primitive. Dacă F este o primitivă a lui f atunci funcția $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitive, iar funcția $F\circ\varphi$ este o primitivă a lui $(f\circ\varphi)\cdot\varphi'$, adică: $\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F\circ\varphi+C$

INTEGRALA DEFINITĂ

O funcție $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ se numește **integrabilă** dacă există un număr real I cu proprietatea că $\forall\varepsilon>0, \exists\eta_\varepsilon>0$ a.î. orice diviziune $\Delta=(x_0,x_1,\dots,x_n)$ a intervalului $[a;b]$ cu $\|\Delta\|<\eta_\varepsilon$ și orice puncte intermediare $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$ $(1\le i\le n)$ are loc inegalitatea $|\sigma_\Delta(f;\xi_i)-I|<\varepsilon$.

$$I\overset{not}{=}\int_a^b f(x)dx=\text{ integrala definită de la } a \text{ la } b \text{ din } f(x).$$

Observație: Integrala nedefinită pentru o funcție este o mulțime de numere; integrala definită pentru o funcție este un număr real.

Dacă $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$ funcții integrabile și α și $\beta\in\mathbb{R}$ atunci avem

$$\int_a^b(\alpha f(x)+\beta g(x))dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

Dacă $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă astfel încât $f(x)\ge 0$, $\forall x\in[a;b]$ atunci

$$\int_a^b f(x)dx\ge 0.$$

Dacă $f,g:[a;b]\to\mathbb{R}$ sunt două funcții integrabile cu $f(x)\le g(x)$ atunci avem

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx.$$

Dacă $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ și $c\in(a;b)$ astfel încât f este integrabilă pe $[a;c]$ și $[c;b]$ atunci f este integrabilă pe $[a;b]$ și avem

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$